Numéro de place

Numéro d'inscription

Signature

Nom D.

Prénom F.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve DM1 - Correction

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

Exercice 1

1. $A = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} = e^{\ln[(1+t^2)^{-1/2}]} = (1+t^2)^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$

$B = e^{x-\ln x} = \frac{e^x}{e^{\ln x}} = \boxed{\frac{e^x}{x}}$

$C = e^{-3\ln t - 2\ln(t+1)} = \frac{1}{e^{3\ln t} \times e^{2\ln(t+1)}} = \frac{1}{e^{\ln(t^3)} e^{\ln[(t+1)^2]}} = \boxed{\frac{1}{t^3(t+1)^2}}$

2. a) • $\ln(1+2x) - 2x \underset{x\to 0}{=} 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) - 2x = \boxed{-2x^2 + o(x^2)}$

• $1-\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = \boxed{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$

b) $\frac{\ln(1+2x)-2x}{1-\cos x} \underset{x\to 0}{\overset{Q2a}{=}} \frac{-2x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x^2}{\frac{x^2}{2}} = -4 \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-4}$

égalité tant qu'on garde les o(...)

on prend les équivalents du numérateur et du dénominateur

simplification

Enfin, on passe à la limite.

Exercice 2

1. $e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \overset{\ln\nearrow}{\iff} x > -x \iff 2x > 0 \underset{/2}{\iff} \boxed{x>0}$

2. D'abord $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ est bien symétrique par rapport à 0

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ $f(-x) = \frac{2(-x)}{e^{-x}-e^{-(-x)}} = \frac{-2x}{e^{-x}-e^{x}} = \frac{-2x}{-(e^x-e^{-x})} = \frac{2x}{e^x-e^{-x}} = f(x)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est paire}}$.

Ne rien écrire dans la partie barrée

3. En reprenant le calcul de Q1, on a $e^{x} - e^{-x} = 0$ ssi $x = 0$. Ainsi le dénominateur de f ne s'annule pas sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et donc la fonction f est continue sur cet ensemble comme quotient de fonctions usuelles

4. On doit montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. On utilise le développement limité de exp

Soit $x \neq 0$. $f(x) = \frac{2x}{e^{x}-e^{-x}} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{1+x-(1+(-x)) + o(x)} = \frac{2x}{2x+o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{2x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f$

Ainsi $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

5. Comme en Q3, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{2(e^{x}-e^{-x}) - 2x(e^{x} - (-e^{-x}))}{(e^{x}-e^{-x})^2} = \boxed{\frac{2(e^{x}-e^{-x}) - 2x(e^{x}+e^{-x})}{(e^{x}-e^{-x})^2}}$$

6. On doit montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left[\frac{2x}{e^{x}-e^{-x}} - 1\right] \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left[\frac{2x}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} - \left(1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}\right) + o(x^3)} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{2x}{2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{2x - \left(2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x} \times \frac{-x^3/3}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{6} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$

7. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions usuelles. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = e^{x} - (-e^{-x}) - \left[1 \times (e^{x} + e^{-x}) + x(e^{x} - e^{-x})\right]$$
$$= e^{x} + e^{-x} - e^{x} - e^{-x} - x(e^{x} - e^{-x})$$
$$= -x(e^{x} - e^{-x})$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$e^{x} - e^{-x}$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	

$\leftarrow$ cf Q1

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe $g'(x)$		$-$	0	$-$	
variations g		$\searrow$	0	$\searrow$	

b) Comme $g(0) = 0$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe $g(x)$		$+$	0	$-$	

8. D'après le calcul effectué en Q5, en mettant 2 en facteur au numérateur, on a $\forall x \in \mathbb{R}^{*}$, $f'(x) = \dfrac{2\left[e^{x} - e^{-x} - x(e^{x} + e^{-x})\right]}{(e^{x} - e^{-x})^{2}} = \boxed{\dfrac{2g(x)}{(e^{x} - e^{-x})^{2}}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$(e^{x} - e^{-x})^{2}$		$+$	0	$+$	
signe $f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
variations f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\leftarrow$ cf Q7b

$\leftarrow$ car carré

Valeurs et limites : • $f(0) = 1$ par définition

• En $+\infty$: On a $e^{x} - e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x}$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

• En $-\infty$: Comme f est paire (cf Q2), on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 3

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et dérivable sur $[10\,000, 10\,001]$ et $\forall x \in [10\,000, 10\,001]$, $|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$.

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|f(10001) - f(10000)| \leq \frac{1}{200}\,|10001 - 10000|$$

ie $$|\sqrt{10001} - 100| \leq \frac{1}{200}.$$

Autrement dit, l'approximation $\sqrt{10001} \approx 100$ comprend $\boxed{\text{une erreur d'au plus } \frac{1}{200} = 0{,}05}$.

Rq : On a en fait $\sqrt{10001} \approx 100{,}004999875\ldots$ donc cette majoration est très précise.

2. Notons n le degré de P. Comme P a toutes ses racines réelles et simples, notons-les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de façon que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$.

~~En tant que fonction polynomiale, P est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur chaque intervalle de la forme $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ avec $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.~~

~~De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$ (ce sont les racines de P).~~

~~Ainsi, d'après le théorème de Rolle appliqué à chacun des $n-1$ intervalles de la forme $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n-1)$,~~

Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. P est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ en tant que fonction polynomiale et $P(\alpha_i) = P(\alpha_{i+1}) = 0$ (ce sont des racines de P) donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $P'(\beta_i) = 0$.

On a ainsi obtenu $n-1$ racines distinctes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ de P'.

Or $\deg(P') = \deg(P) - 1 = n-1$ donc nous avons toutes les racines de P'.

Ainsi $\boxed{P' \text{ a toutes ses racines réelles et simples}}$.

(Rq : les β_i sont 2 à 2 distincts car $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \ldots$)